# هندسه ۳

## فصل سوم: بردارها

## درس اول: معرفی فضای $\mathbb{R}^3$

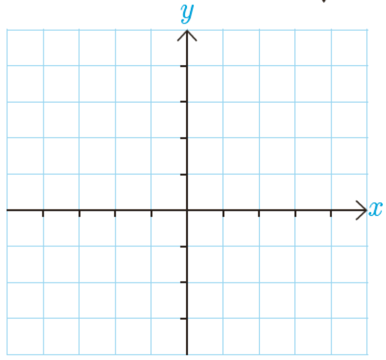
### یادآوری

در سال‌های گذشته با فضای $\mathbb{R}^2$ به عنوان مجموعه‌ی تمام زوج مرتب‌های $(x,y)$ که $x$ و $y$ اعدادی حقیقی‌اند، آشنا شدیم و نمایش هندسی آن را به صورت دو محور عمود بر هم نشان دادیم: $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(x,y)|x,y\in\mathbb{R}\}$

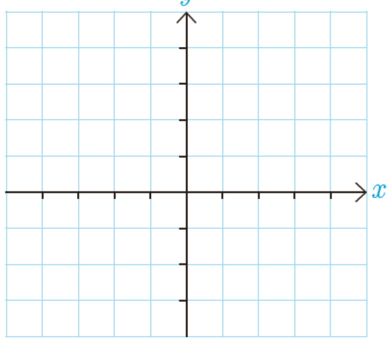
همچنین با معادله خط در صفحه آشنایی داریم و می‌دانیم که حالت کلی آن به صورت $ax+by+c=0$ است.

☑ **مثال: برای هر یک از روابط زیر ابتدا چند نقطه از صفحه که در آن رابطه صدق می‌کند را مشخص کنید و سپس شکل کلی مربوط به آن رابطه را تعیین نمایید.**

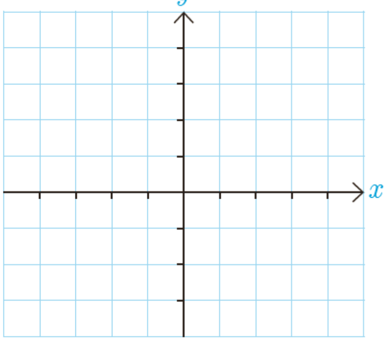
الف) $x=0$



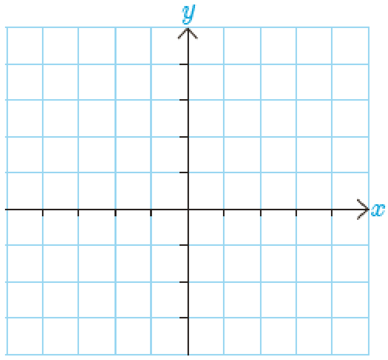

ب) $y=0$



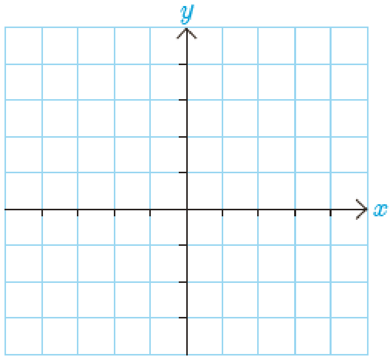

پ) $x=1$



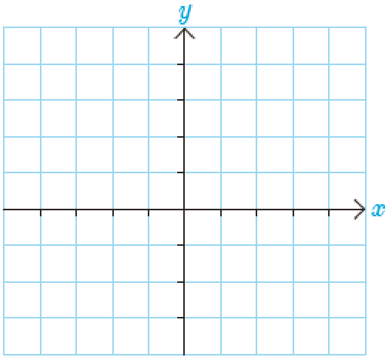

ت) $x=1 \quad , \quad -1\le y<3$



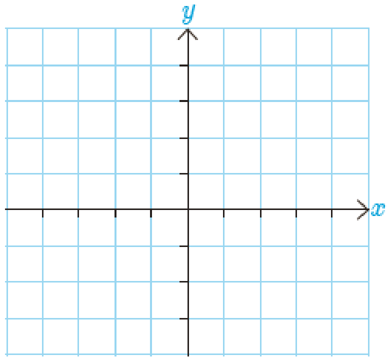

ث) $y=x^2 \quad , \quad -1<x\le 2$



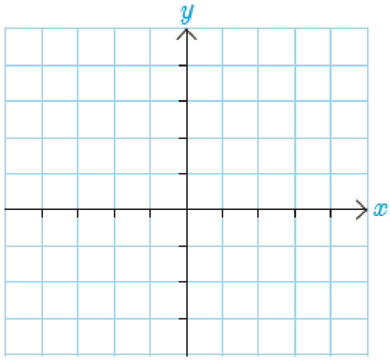

ج) $y=x^2 \quad , \quad 1\le x\le 2$



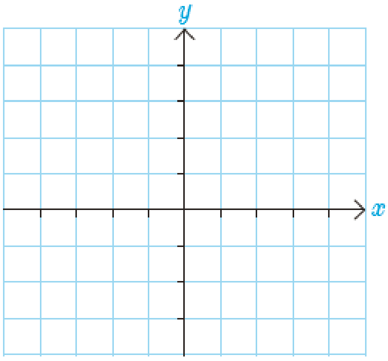

چ) $-1\le x\le 1 \quad , \quad -2\le y\le 1$




ح) $x^2<y\le 2$

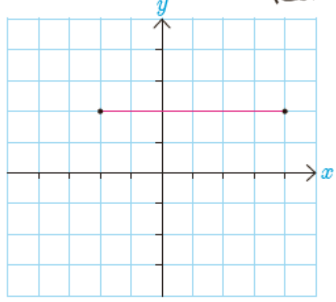



خ) $y\ge x^2$

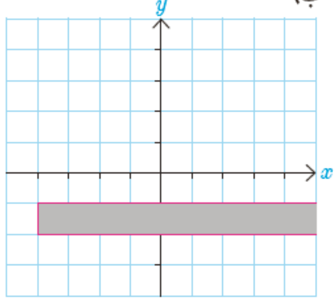


☑ **مثال:** **در هر یک از شکل‌های زیر ابتدا مختصات چند نقطه از آن شکل را مشخص نمایید و سپس با توجه به ویژگی‌های مشترک نقاط مشخص شده و ویژگی‌های دیگری که از شکل دریافت می‌کنید رابطه مربوط به آن شکل را بنویسید.**

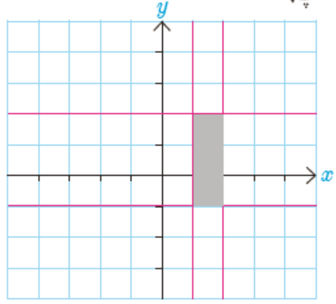
الف)



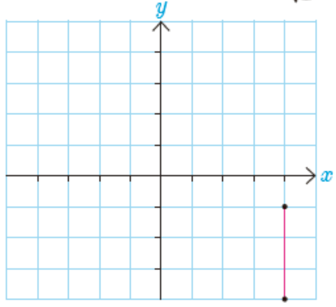

ب)




پ)



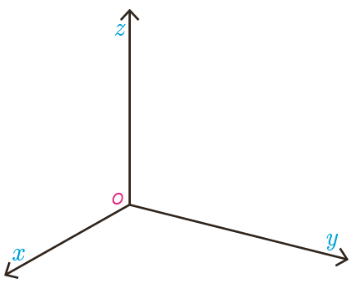

ت)

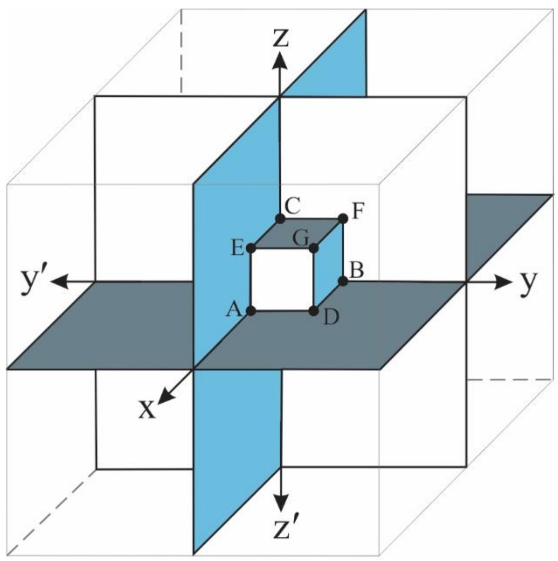


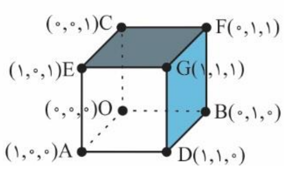

حال اگر به مؤلفه‌های x و y فضای $\mathbb{R}^{۲}$ یک مؤلفه‌ی دیگر (z) اضافه کنیم، فضای $\mathbb{R}^{۳}$ به وجود می‌آید:

$$\mathbb{R}^{۳} = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \{(x,y,z) | x,y,z \in \mathbb{R}\}$$

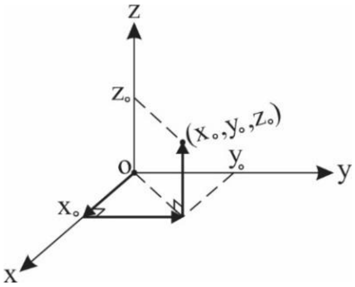
برای نمایش هندسی فضای $\mathbb{R}^{۳}$ از سه محور دوبه‌دو عمود بر هم استفاده می‌کنیم:



ترتیب محورها به صورت راست‌گرد است. این سه محور دوبه‌دو عمود بر هم، فضا را به ۸ ناحیه تقسیم می‌کنند. هر سه محور در مبدأ هم‌رسند. خطوط ox و oy و oz را به ترتیب محور xها و yها و zها می‌نامیم. همچنین این سه محور، سه صفحه‌ی دوبه‌دو عمود بر هم xy، xz و yz به وجود می‌آورند.




هر نقطه در فضای $\mathbb{R}^3$ با سه تایی مرتب $(x_\circ,y_\circ,z_\circ)$ نمایش داده می‌شود:

## * معادلات محورها و صفحات مختصات

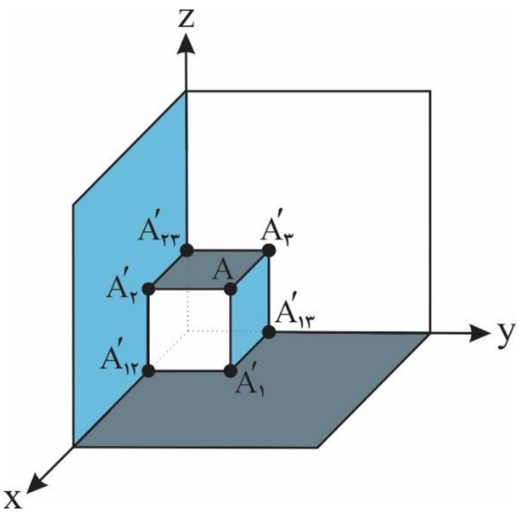
صفحه‌ی xy $:\{(x,y,z)|z=\circ\}$ — محور xها $:\{(x,y,z)|y=z=\circ\}$

صفحه‌ی xz $:\{(x,y,z)|y=\circ\}$ — محور yها $:\{(x,y,z)|x=z=\circ\}$

صفحه‌ی yz $:\{(x,y,z)|x=\circ\}$ — محور zها $:\{(x,y,z)|x=y=\circ\}$

☑ **مثال: اگر نقطه‌ی $A(m^3-m,2,1-m^2)$ روی محور yها باشد، مقادیر m را بیابید.**

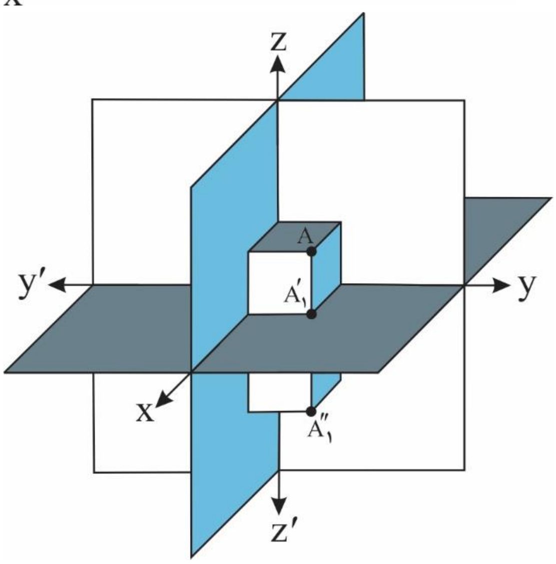
## * تصویرهای یک نقطه بر محورها و صفحات مختصات




نقطه‌ی $A(x,y,z)$ مفروض است. تصویر نقطه‌ی A بر روی:

- صفحه‌ی xy، نقطه‌ی $A'_1(x,y,\circ)$ می‌باشد.
- صفحه‌ی xz، نقطه‌ی $A'_2(x,\circ,z)$ می‌باشد.
- صفحه‌ی yz، نقطه‌ی $A'_3(\circ,y,z)$ می‌باشد.
- محور xها، نقطه‌ی $A'_{12}(x,\circ,\circ)$ می‌باشد.
- محور yها ، نقطه‌ی $A'_{13}(\circ,y,\circ)$ می‌باشد.
- محور zها ، نقطه‌ی $A'_{23}(\circ,\circ,z)$ می‌باشد.

## * قرینه‌های یک نقطه نسبت به محورها و صفحات مختصات




قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به صفحه‌ی xy که zاش قرینه شده است

نقطه‌ی $A(x,y,z)$ مفروض است. قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به:

- صفحه‌ی xy، نقطه‌ی $A''_1(x,y,-z)$ می‌باشد.
- صفحه‌ی xz، نقطه‌ی $A''_2(x,-y,z)$ می‌باشد.
- صفحه‌ی yz، نقطه‌ی $A''_3(-x,y,z)$ می‌باشد.
- محور xها، نقطه‌ی $A''_{12}(x,-y,-z)$ می‌باشد.
- محور yها ، نقطه‌ی $A''_{13}(-x,y,-z)$ می‌باشد.
- محور zها ، نقطه‌ی $A''_{23}(-x,-y,z)$ می‌باشد.

☑ **تست: اگر قرینه‌ی نقطه‌ی $A(a-۲,۳,۳-b)$ نسبت به محور zها، نقطه‌ی $B(a+b,b+۱,c)$ باشد، حاصل $a+b+c$ کدام است؟**

۱) ۴

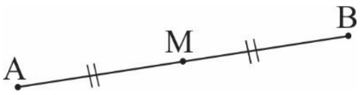
۲) ۵

۳) ۶

۴) ۷

## * مختصات وسط یک پاره‌خط

اگر نقاط A و B مفروض باشند، مختصات نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB عبارت است از:



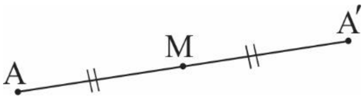

$$M=\frac{A+B}{۲}=(\frac{x_A+x_B}{۲},\frac{y_A+y_B}{۲},\frac{z_A+z_B}{۲})$$

☑ **مثال: سه نقطه‌ی $A(۱,۳,۳)$ و $B(۲,-۲,۲)$ و $C(۰,-۱,۴)$ سه رأس مثلث ABC هستند. قرینه‌ی نقطه‌ی M وسط پاره‌خط BC، نسبت به صفحه‌ی xz را بیابید.**

**تمرین:** در متوازی‌الاضلاع ABCD ثابت کنید: $\boxed{A+C=B+D}$

**تمرین:** ثابت کنید مختصات مرکز ثقل مثلث ABC از رابطه‌ی $G=\frac{A+B+C}{۳}$ به دست می‌آید.

**نکته:** قرینه‌ی نقطه‌ی $A(x,y,z)$ نسبت به نقطه‌ی $M(a,b,c)$، نقطه‌ی $A'(۲a-x,۲b-y,۲c-z)$ است، زیرا:




$$M=\frac{A+A'}{۲}\Rightarrow A'=۲M-A$$

**نتیجه:** قرینه‌ی نقطه‌ی $A(x,y,z)$ نسبت به مبدأ مختصات، نقطه‌ی $A'(-x,-y,-z)$ است.

☑ **تست: نقطه‌ای به ارتفاع ۳ واقع بر صفحه‌ی yz، قرینه‌ی نقطه‌ی $A(b,۳,a)$ نسبت به نقطه‌ی $B(۱,-۱,۳)$ است. $a+b$ چند واحد از عرض این نقطه بیشتر است؟**

۱) ۵-

۲) ۵

۳) صفر

۴) ۱۰